

ΓΡΑΠΤΟ ΓΙΑ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΚΑΙ ΛΥΚΕΙΟ

Πρόβλημα 1. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f(x)$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι τέτοιες ώστε:

$$f(x + y) + f(x - y) + y = f(xy)$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y .

Πρόβλημα 2. Ναδειχθεί ότι ο 2034-ψήφιος αριθμός $N = 961961961 \dots 61961$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου αριθμού.

Πρόβλημα 3. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο ώστε $\angle B\Lambda\Gamma = 30^\circ$ και $\angle A\Gamma B = 45^\circ$. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο το σημείο A και περνάει από το σημείο B . Επίσης ο κύκλος C_1 τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ συναρτήσει της ακτίνας του κύκλου C_1 .

Πρόβλημα 4. Σε μία οριζόντια γραμμή στέκονται 2021 άτομα. Ονομάζουμε τα άτομα ως $A_1, A_2, A_3, A_4 \dots A_{2021}$. Σε κάθε γύρο όλα τα άτομα κάνουν από μία δήλωση, η οποία είναι είτε αληθή είτε ψευδή. Όποιος λέει την αλήθεια, στο τέλος του κάθε γύρου φεύγει από την γραμμή. Ονομάζουμε ως $\Sigma(A_n)$ το πλήθος των ατόμων που στέκονται αριστερά από το άτομο A_n και $T(A_n)$ το πλήθος των ατόμων που στέκονται δεξιά από το άτομο A_n με $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \dots 2020\}$. Κάθε ένας από αυτούς, σε όλους τους γύρους, λέει ότι οι αριθμοί $\Sigma(A_n)$ και $T(A_n)$ είναι πρώτοι μεταξύ τους. Μετά από κάποιους γύρους, ποια άτομα θα μείνουν τελευταία στην γραμμή, όταν το παιχνίδι δεν μπορεί να επαναληφθεί πλέον;

Σημείωση 1: (Ουσιαστικά κάθε άτομο λέει σε όλους τους γύρους που βρίσκεται στην γραμμή, ότι ο αριθμός των ατόμων που βρίσκονται αριστερά του και ο αριθμός των ατόμων που βρίσκονται δεξιά του είναι πρώτοι μεταξύ τους. Όταν αυτό ισχύει όντως, τότε το άτομο φεύγει από την γραμμή στο τέλος του κάθε γύρου)

Σημείωση 2: (Ο πρώτος και ο τελευταίος στην σειρά, επειδή δεν έχουν κάποιο άτομο δίπλα τους, θεωρούμε πως και οι δύο λένε την αλήθεια και άρα φεύγουν από την γραμμή στο τέλος του κάθε γύρου).