Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Creator: Panayiotis Yiorkas

Πρόβλημα 1: Να βρείτε όλες τις τριάδες μη αρνητικών ακεραίων (a, b, c) όπου:

$$(c^2 + 1)(a^3 - b^3) = 12bc$$

Πρόβλημα 2: Αν για τους πραγματικούς αριθμούς:

$$a, b, c, d, e, x, y, z, k, t \ (x, y, z, k, t > 0)$$

ισχύει ότι:

$$x + y + z + k + t = 10$$

και

$$(\alpha^2 + 6\alpha + 11)(b^2 + 8b + 19)(c^2 + 10c + 32)(d^2 + 12d + 37) = xyzkt + 10$$

Να αποδείξετε ότι:

$$a + b + c + d = -18$$

Πρόβλημα 3: : Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ περιμέτρου $1cm$.Έστω C_1 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΑΒΓ$.Δίνεται επίσης το εγγεγραμμένο ορθογώνιο $ΔΕΖΗ$ του κύκλου C_1 με το μήκος του να είναι διπλάσιο του πλάτους του $ΔΕ > ΕΖ$.Από το $Ε$ φέρουμε κάθετη $ΕΙ$ πάνω στην διαγώνιο $ΔΖ$(το $Ι$ είναι σημείο πάνω στην $ΔΖ$). Από το $Ι$ φέρουμε κάθετη $ΙΚ$ πάνω στην $ΔΕ$. Έστω C_2 ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΕΙΚ$. Να βρείτε τον λόγο των ακτινών των κύκλων C_1 και C_2.

Πρόβλημα 4: Θεωρούμε το σύνολο $A = \{1,2,3,4,5 \dots 199,200\}$. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων που πρέπει να διαγραφούν από το σύνολο, ώστε το γινόμενο των υπόλοιπων στοιχείων να γίνει:
(α) τέλειο τετράγωνο.
(β) τέλειος κύβος