Λύση πρώτου προβλήματος (Γ' λυκείου)

Να βρείτε όλες τις τετράδες πρώτων αριθμών (p, q, r, k) όπου οι αριθμοί:

$$A = \frac{2031+q}{3p} \qquad B = \frac{r^3+4}{5k-3} \qquad \Gamma = \frac{p+1}{r}$$

είναι όλοι ακέραιοι.

Λύση:

Προφανώς, για να είναι οι αριθμοί:

$$A = \frac{2031+q}{3p} \qquad B = \frac{r^3+4}{5k-3} \qquad \Gamma = \frac{p+1}{r}$$

ακέραιοι, τότε πρέπει:

$$(1) \quad 3p/2031+q$$

$$(2) \quad 5k-3/r^3+4$$

$$(3) \quad r/\,p+1$$

- Ξεκινάμε από την σχέση (1). Ο αριθμός $3p$ είναι πολλαπλάσιο του 3. Για να διαιρείτε το $2031+q$ με ένα πολλαπλάσιο του 3 τότε πρέπει και αυτό να είναι πολλαπλάσιο του 3. Αφού ο αριθμός 2031 είναι πολλαπλάσιο του 3 τότε πρέπει και το q να είναι πολλαπλάσιο του 3. Αφού το q είναι πρώτος, τότε πρέπει $q=3$ αναγκαστικά. Τώρα αφού βρήκαμε $q=3$ τότε βρίσκουμε ότι το $3p$ πρέπει να διαιρεί το 2034. Άρα το $3p$ διαιρεί το $113 \cdot 9 \cdot 2$. Αφού το p είναι πρώτος, οι μοναδικές τιμές που μπορεί να πάρει είναι $p\epsilon\{3,2,113\}$.
- Τώρα πάμε στην σχέση (3). Αφού βρήκαμε ότι $p\epsilon\{3,2,113\}$, τότε ο r πρέπει να διαιρεί έναν από τους αριθμούς 4,3,114. Αν ο r διαιρεί το 3 τότε προφανώς $r=3$. Αν ο r διαιρεί το 4 τότε $r=2$. Αν ο r διαιρεί το 114 όπου $114 = 2 \cdot 19 \cdot 3$ τότε πρέπει $r=3$ ή $r=19$ ή $r=2$. Τελικά βρίσκουμε ότι $r\epsilon\{2,3,19\}$.
- Τώρα πάμε στην σχέση (2). Γνωρίζουμε ότι όλοι οι πρώτοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 2 είναι περιττοί. Άρα υποθέτουμε αρχικά ότι ο r και ο k είναι περιττοί. Τότε το $5k-3$ θα ήταν άρτιο και το r^3+4 θα ήταν περιττό. Όμως αυτό είναι αδύνατον, αφού κανένας άρτιος αριθμός δεν διαιρεί κάποιον περιττό αριθμό, άρα αναγκαστικά $k=2$ ή $r=2$. Αν $k=2 \Rightarrow 5k-3=7$ τότε θα πρέπει το 7 να διαιρεί έναν από τους αριθμούς :

$$\alpha = 2^3+4, \qquad \beta = 3^3+4, \qquad \gamma = 19^3+3$$

Όμως εύκολα καταλαβαίνουμε ότι κανένας από τους αριθμούς που βρήκαμε δεν είναι πολλαπλάσιος του 7, έτσι παίρνουμε ότι $r = 2$.

- Τώρα όμως πρέπει να επιστρέψουμε ξανά στην σχέση (3). Αφού βρήκαμε ότι $r = 2$ και άρα το r είναι άρτιο, τότε πρέπει και το $p + 1$ να είναι άρτιο δηλαδή το p να είναι περιττό και άρα το p δεν μπορεί να ισούται με 2, όπως θέσαμε πριν, επομένως $p \epsilon \{3,113\}$.

Και βρίσκουμε τις λύσεις:

$$(p, q, r, k) = (3,3,2,3) \; και \; (p, q, r, k) = (113,3,2,3)$$

που είναι και οι μοναδικές λύσεις του προβλήματος.