# ΛΎΣΗ ΠΡΩΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ Β'ΛΥΚΕΙΟΥ

Να βρείτε όλες τις τριάδες θετικών ακεραίων $(a, b, c)$ όπου:

$$a! + b^2 = c! + 8$$

**Λύση:**

Γενικά το τελευταίο ψηφίο του παραγοντικού κάθε θετικού ακέραιου αριθμού μεγαλύτερο του 4 θα είναι πάντα το 0. Υποθέτουμε ότι $a, b > 4$ όμως αυτό απορρίπτεται επειδή το τελευταίο ψηφίο του $b^2$ θα είναι το 8 αλλά είναι άτοπο καθώς κανένα τέλειο τετράγωνο δεν τελειώνει σε 8. Έτσι πρέπει $\alpha \leq 4$ ή $c \leq 4$. Αρχικά υποθέτουμε ότι $c \leq 4$. Τότε c$\epsilon\{1,2,3,4\}$. Δοκιμάζουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $c = 1$ τότε $\alpha! + b^2 = 9$ ,όμως δοκιμάζοντες τιμές του b $\leq$ 3 καταλαβαίνουμε εύκολα ότι αυτό είναι άτοπο.
- Αν $c = 2$ τότε $\alpha! + b^2 = 10$ ,όμως δοκιμάζοντες τιμές του b $\leq$ 3 καταλαβαίνουμε εύκολα ότι οι μοναδικές λύσεις είναι οι $(a, b, c) = (1,3,2)$ και $(a, b, c) = (3,2,2)$
- Αν $c = 3$ τότε $\alpha! + b^2 = 14$ ,όμως δοκιμάζοντες τιμές του b $\leq$ 3 καταλαβαίνουμε εύκολα ότι αυτό είναι άτοπο.
- Αν $c = 3$ τότε $\alpha! + b^2 = 14$ ,όμως δοκιμάζοντες τιμές του b $\leq$ 5 καταλαβαίνουμε εύκολα ότι αυτό είναι άτοπο.

Έτσι θα εργαστούμε με $\alpha \leq 4$ και $c > 4$.

- Αν $\alpha = 1$ απορρίπτεται καθώς , το τελευταίο ψηφίο του $b^2$ θα είναι το 7 και αυτό έιναι άτοπο
- Αν $\alpha = 2$ θα έχουμε ότι :

$$b^2 - c! = 6$$

Όμως αφού θέσαμε ότι $c > 4$ τότε το $c!$ θα είναι πολλαπλάσιο του 12 . Τότε πρέπει και το $b^2$ να είναι πολλαπλάσιο του 6 όμως αφού είναι υψωμένο στην δευτέρα πρέπει να διαιρείτε με το 12 έτσι το αριστερό μέλος της εξίσωσης θα είναι πολλαπλάσιο του 12 ενώ το δεξί όχι.

- Αν $\alpha = 3$ θα έχουμε ότι :

$$b^2 - c! = 2$$

Όμως και αυτό απορρίπτεται καθώς αφού $c > 4$ τότε το $c!$ θα τελειώνει σε 0 και τότε το $b^2$ θα είναι πρέπει να τελειώνει σε 2 άρα είναι άτοπο.

- Αν $\alpha = 4$ θα έχουμε ότι :

$$c! - b^2 = 16$$

Θα χρησιμοποιήσουμε mod6. Αφού το $c > 4$ τότε το $c!$ θα διαιρείτε με το 6. Έτσι αφού το 16 είναι της μορφής 4mod6 τότε το $b^2$ θα είναι της μορφής 2mod6 που είναι άτοπο. Έτσι οι μοναδικές λύσεις του προβλήματος είναι οι:

$$(a, b, c) = (1,3,2) \; και \; (a, b, c) = (3,2,2)$$