

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$123456789 - 123456785 \cdot 123456793 - 16$$

2. Δίνεται μία ακολουθία  $\alpha_n$  τέτοια ώστε:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - 2\alpha_{n-2} + n^2 - 4 \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

Σας δίνεται ότι  $\alpha_1 = 1$  και  $\alpha_3 = 4$  τότε ποια είναι η τιμή του  $\alpha_6$ ;

3. Δίνεται ένας αριθμός  $x$ . Αυτός ο αριθμός αυξάνεται κατά 30% και δημιουργείτε ο αριθμός  $y$ . Μετά ο αριθμός  $y$  αυξάνεται κατά 40% και μετατρέπεται σε ένα αριθμό  $z$ . Αυτός ο αριθμός  $z$  μειώνεται κατά 60% και δημιουργείτε ο αριθμός  $m$ . Κατά ποιο ποσοστό πρέπει να αυξηθεί ο  $m$  για να μετατραπεί στον αρχικό αριθμό  $x$ ;

4. Ένας πεζοπόρος A χρειάζεται τρεις ώρες ακριβώς για να διανύσει μία απόσταση  $X$ . Ένας δεύτερος πεζοπόρος B θέλει να διανύσει μία απόσταση  $3X$ . Το πρώτο μισό της διαδρομής πηγαίνει με διπλάσια ταχύτητα από τον πεζοδρόμο A και στο άλλο μισό πηγαίνει με το 70% της ταχύτητας που πήγαινε προηγουμένως. Τι ώρα θα φτάσει στον προορισμό του αν ξεκινήσει την διαδρομή η ώρα 4:00;

5. Αν οι πρώτοι αριθμοί  $p$  και  $q$  ικανοποιούν το:

$$p^3 = p + q^4 + 1320$$

Τότε η τιμή του  $p$  είναι:

6. Ένας ανελκυστήρας μπορεί να μεταφέρει το πολύ 250kg. Ο Άκης ζυγίζει 80kg και ο συνεργάτης του ο Σάββας ζυγίζει 70kg. Έχουνε μαζί τους κάποιες κατασκευές που ζυγίζουν 40kg(3), 50kg(4) η ακόμα και 60kg(2) και 100kg(1). Θέλουνε να τις μεταφέρουν όλες στον πάνω όροφο. Όταν οι συσκευασίες ζυγίζουν μαζί περισσότερα ή ακριβώς 100kg τότε ο Άκης χρειάζεται την βοήθεια του συνεργού του αλλιώς το κάνει μόνος του. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός από φορές που θα χρησιμοποιηθεί ο ανελκυστήρας για να μεταφέρει όλες τις συσκευασίες;

7. Σας δίνεται το διάγραμμα ποιο κάτω:

1  
2 3  
4 5 6  
7 8 9 10  
11 12 13 14 15  
...

(α) Να βρείτε σε ποια γραμμή βρίσκεται ο αριθμός 2020.

(β) Να εξετάσετε κατά πόσο το 365 θα βρίσκεται στο κέντρο κάποιας γραμμής.

8. Την Δεύτερα ο Αντρέας έδωσε €x και έπιασε πίσω €y. Την Τρίτη ο Αντρέας έδωσε €x<sup>2</sup> και πήρε πίσω €y<sup>2</sup>. Την Τετάρτη έδωσε €x<sup>3</sup> και πήρε €y<sup>3</sup>. Αν τώρα έχει €141 ποια είναι η τιμή του x-y;

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με AB=8 και ΑΓ=10. Έστω Ρ το άθροισμα όλων των συνημίτονων των γωνιών του τριγώνου και Σ το άθροισμα όλων των εφαπτόμενων των γωνιών του τριγώνου. Να υπολογίσετε το Σ-Ρ.

10. Ένας δρομέας ξεκινά να τρέχει από ένα σημείο Α σε ένα κυκλικό κόμβο προς τα αριστερά με ταχύτητα 20km/h. Ένας άλλος δρομέας ξεκινά από ένα σημείο Β προς τα δεξιά με ταχύτητα 15km/h. Σε πόσα λεπτά περίπου οι δύο δρομείς θα συναντηθούν για δεύτερη φορά αν ο κυκλικός κόμβος έχει ακτίνα 5km;

11. Μπροστά μας υπάρχουν 100 μπάλες. Θέλουμε να βάλουμε τις μπάλες σε τρία κουτιά ώστε, κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον μία μπάλα και όλες οι μπάλες να βρίσκονται σε κάποιο κουτί. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να το κάνουμε αυτό;

(Α)4554      (Β)4658      (Γ)4754      (Δ)4851      (Ε)4950



12. Ο Αντώνης ξέχασε τον κωδικό του κωδικού του. Θυμάται ότι αποτελείται από ακριβώς τρία ψηφία. Θυμάται ότι τα άρτια ψηφία ήταν περισσότερα από τα περιττά και ότι ο κωδικός ήταν πολλαπλάσιο του 5. Πόσους αριθμούς τουλάχιστον πρέπει να δοκιμάσει ώστε να πετύχει τον κωδικό του;



13. Δίνεται το σύνολο  $A = \{1, 2, 3\}$  σε κάθε κίνηση κάθε στοιχείο μετατρέπεται στο άθροισμα των άλλων δύο στοιχείων συν 1. Πχ το σύνολο  $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  μετά από μία κίνηση μετατρέπεται σε  $B = \{\beta + \gamma, \alpha + \gamma, \alpha + \beta, \}$ . Μετά από 2019 κινήσεις ποιος θα είναι ο μεγαλύτερος αριθμός στο σύνολο Α;

14. Ένας εξαψήφιος αριθμός αποτελείται από ακριβώς πέντε διαφορετικά ψηφία και δεν περιέχει καθόλου το ψηφίο 0. Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;

15. Φέρουμε τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα όπου οι άκρες τους ακουμπούν στην περιφέρεια του κύκλου και χωρίζουν τον κύκλο το πολύ α χωρία. Φέρουμε επίσης τρία ευθύγραμμα τμήματα σε ένα άλλο κύκλο όπου οι άκρες τους ακουμπούν στην περιφέρεια του κύκλου και χωρίζουν τον δεύτερο κύκλο σε πολύ β χωρία. Ποιά είναι η τιμή του α-β;

16. Ο Γιάννης έχει 5 ταμπέλες και θέλει την κάθε μια να τη μπογιατίσει με ένα και μόνο χρώμα ώστε να μην υπάρχουν δύο ταμπέλες με το ίδιο χρώμα. Αυτό μπορεί να το κάνει με ακριβώς 75600 τρόπους. Αν οι ταμπέλες ήταν 6 με πόσους διαφορετικούς τρόπους θα μπορούσε να τις μπογιατίσει την κάθε μια με μονό ένα διαφορετικό χρώμα ώστε να μην υπάρχουν δύο ίδιες ταμπέλες με το ίδιο χρώμα, αν είχε τα ίδια ακριβώς χρώματα ;

17. Όταν σε ένα κανονικό ρολόι τοίχου κοιτάξεις την ώρα και δείχνει 4 και 20 παρατηρείς ότι οι δείκτες του (ωροδείκτης και λεπτοδείκτης) σχηματίζουν μεταξύ τους γωνιά 10 μοιρών. Ποιά ώρα από τις ποιο κάτω ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης θα σχηματίσουν μεταξύ τους γωνιά 20 μοιρών;



shutterstock.com • 50662186

18. Σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου αγωνίστηκαν 5 ομάδες οι Α, Β, Γ, Δ και Ε. Μετά από κάθε νίκη η ομάδα που κέρδιζε έπαιρνε δύο βαθμούς, η ομάδα που έχανε, έχανε και ένα βαθμό και κάθε ισοπαλία κάθε ομάδα έπαιρνε 1 πόντο. Αν η ομάδα Α συγκέντρωσε 5 πόντους, η ομάδα Β συγκέντρωσε 7 πόντους, και η ομάδα Γ συγκέντρωσε 1 πόντο τότε πόσους πόντους το πολύ μπορεί να συγκέντρωσε η ομάδα Δ;

19. Δύο ίση κύκλοι εφάπτονται στα κέντρα τους. Το εμβαδόν που περικλείεται από τους δύο κύκλους είναι σκιασμένο. Η απόσταση των κέντρων των κύκλων είναι 6. Πόσο περισσότερο είναι το ασκίαστο εμβαδόν από το σκιασμένο;

20. Σε 5 κουτιά τοποθετούνται κάποιες μπάλες στο κάθε ένα. Είναι γνωστό ότι όλα τα κουτιά περιέχουν πρώτο αριθμό μπαλών ( πχ 3,5,7,11,13... ) . Τα κουτιά αριθμούνται με τους αριθμούς 1,2,3,4 και 5. Στο κουτί «1» υπάρχουν περισσότερες μπάλες από το κουτί «2». Το κουτί «3» έχει περισσότερες μπάλες από το κουτί «2». Το κουτί «4 » περιέχει όσες μπάλες έχει και το κουτί «1» και το κουτί «5» περιέχει λιγότερες μπάλες από το κουτί «2». Όλα τα κουτιά περιέχουν συνολικά 60000 μπάλες. Πόσες μπάλες περιέχει το σακούλι «5»;



21. Ένα αγόρι μπογιατίζει ένα τοίχο. Την πρώτη μέρα μπογιατίζει το  $\frac{1}{n}$  του τοίχου, την δεύτερη μπογιατίζει το  $\frac{1}{n}$  του τοίχου που έμεινε, την τρίτη μέρα μπογιατίζει το  $\frac{1}{n}$  του τοίχου που έμεινε, την τέταρτη το  $\frac{1}{n}$  του τοίχου που έμεινε κ.τ.λ. Την χ-οστή μέρα θα μπογιατίσει το:

22. Ένας κύκλος χωρίζεται σε 10 περιοχές όπου κάθε σημείο τομής δύο τέτοιων περιοχών σημειώνεται και ένας αριθμός. Το άθροισμα οποιοδήποτε τριών συνεχόμενων αριθμών είναι 12 και το άθροισμα κάθε τεσσάρων συνεχόμενων αριθμών είναι 15. Το άθροισμα κάθε πέντε συνεχόμενων αριθμών είναι:

23. Το ύψος του πύργου Α έχει αναλογία 5 προς 3 με το ύψος του πύργου Β. Ο πύργος Β έχει αναλογία 7 προς 5 με το ύψος ενός πύργου Γ. Το άθροισμα των υψών και των τριών πύργων είναι 300 m. Πόσο είναι περίπου το ύψος του πύργου Γ;

24. Κάποια συνηθισμένα ζάρια τοποθετούνται το ένα πάνω στο άλλο δημιουργώντας μία κατασκευή. Η κατασκευή πέφτει σε κουβά με μπογιά. Το άθροισμα των αριθμών που αναγράφουν οι έδρες των ζαριών που είχαν μπογιά είναι 104. Το άθροισμα των αριθμών που αναγράφονται στις έδρες που δεν είχαν μπογιά είναι 41. Πόσα ζάρια χρησιμοποιήθηκαν στην κατασκευή;



25. Οι πενταψήφιοι αριθμοί 22233 και 11198 έχουν τη ιδιότητα ότι το γινόμενο των ψηφίων τους είναι 72. Πόσοι τέτοιοι πενταψήφιοι αριθμοί υπάρχουν;

26. (α) Να αποδείξετε ότι για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

(β) Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha + \beta - \gamma)^2 + (\alpha + \beta - \gamma)^2 + (\alpha + \beta - \gamma)^2 = 3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma$$

(γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση ποιο κάτω:

$$(\alpha - \beta - \gamma)^2 + (\alpha - \beta - \gamma)^2 + (\alpha - \beta - \gamma)^2$$

είναι ίση με την προηγούμενη.

27. Αν για τους πρώτους αριθμούς  $p$  και  $q$  ισχύει ότι:

$$4p + q^4 = p^3 + q^2 + 592$$

Τότε το  $p^2 + q^3$  είναι:

28. (α) Να αποδείξετε ότι το:

$$n^3 - n + 6$$

διαίρεται με το 6 για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ .

(β) Να αποδείξετε ότι το:

$$x^5 - x$$

διαίρεται με το 30 για κάθε ακέραιο  $x$ .

29. (α) Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $AB$  προς το μέρος του  $B$  και παίρνουμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $AB=BE$ . Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών του τριγώνου  $A\Gamma E$  και του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .

(β) Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με τις γωνίες  $A$  και  $B$  να είναι ορθές. Αν  $AB=AD=\frac{B\Gamma}{2}$  να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Delta$  είναι κάθετο πάνω στην πλευρά  $\Gamma\Delta$ .

30. Δίνονται 2020 ισόπλευρά τρίγωνα πλευράς 1. Με αυτά κατασκευάζουμε ένα σχήμα μέσα στο επίπεδο. Ποιά είναι η ελάχιστη περίμετρος του νέου σχήματος;