ΓΡΑΠΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ(4)

Πρόβλημα 1:

Για την συνάρτηση f(x) ισχύει ότι $f(x) = x^{2019} + x^{2018} + x^{2017} + x^{2016} \dots + x^2 + x$.

Σας δίνεται ο αριθμός:

$$A: f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) \dots + f(2017) + f(2018) + f(2019)$$

(α) Να αποδείξετε ότι το A διαιρείτε με το 3.

(β) Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του A.

Πρόβλημα 2:

(α) Να αποδείξετε ότι θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b *και* c $(\alpha > \beta)$ *ισχύει πάντα η ανισότητα:*

$$2\alpha + \gamma \geq 2\sqrt{\alpha\beta} - 2\sqrt{2\beta\gamma} + 2\sqrt{\alpha\gamma}$$

(β) Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}$$

Αν $x + y + z$*=1000 και* $x \neq y \neq z.$ $(\ x, y, z\ \in N)$.

Πρόβλημα 3:

Σε κάθε μία κορυφή ενός k-γώνου τοποθετείται ένας φυσικός αριθμός από το 1 μέχρι το k ώστε οι αριθμοί κάθε δύο κορυφών που ενώνονται με μία πλευρά του k-γώνου να διαφέρουν κατά 1. Να βρείτε την πιθανότητα μια διαγώνιος του k-γώνου να συνδέει δύο κορυφές όπου το άθροισμα των αριθμών όπου είναι σημειωμένες να είναι περιττός αριθμός.

Πρόβλημα 4:

Να βρείτε όλες τις δυνατές πεντάδες πρώτων αριθμών (m, k, c, p) *που ικανοποιούν την εξίσωση ποιο κάτω.*

$$m^3 + m = k^2 + c^2 + p^2$$

Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντηση σας.